З. А. СОКУЛЕР

Людвиг Витгенштейн и его место в философии XX в. (Витгенштейновская философия математики)

<Фрагмент>

После завершения работы над «Логико-философским трактатом» Витгенштейн почти на десять лет прерывает занятия философией. Возвращение к философии произошло в самом конце 1920-х гг. Существует предание, что это случилось после того, как в 1928 г. он услышал лекцию Л. Э. Я. Брауэра, голландского математика, основоположника математического интуиционизма. В 1929 г. Витгенштейн вернулся в Кембридж и в последующие годы напряженно размышлял над вопросами работы языка и оснований математики. Ничего из написанного им за это время при жизни не публиковалось. Его взгляды непрерывно развивались и углублялись, так и не обретя настолько законченную форму, чтобы он был удовлетворен и опубликовал свои мысли.

В дальнейшем, при упоминании конкретных работ Витгенштейна, надо помнить, что фактически он таких книг не писал. Они составлены его душеприказчиками, которые выбирают и систематизируют заметки и фрагменты из его обширного рукописного наследия (за исключением «Философских исследований», которые в основном были скомпонованы им самим). Другим видом источников являются издания лекций, читавшихся Витгенштейном. Они готовятся на основе сопоставления записей этих лекций, сделанных в свое время различными слушателями.

Возникает сложный вопрос о понимании этих текстов, лишенных структуры и систематичности. И трудность здесь не только в том, что рукописи Витгенштейна остались незавершенными. Эта трудность связана со спецификой разрабатываемого им подхода. Витгенштейн убежден, что философские проблемы по большей части бессмысленны и требуют логического прояснения мыслей (того человека, которого мучают такие проблемы). Каким образом можно прояснить мысли другого человека? Есть метод, называемый сократическим: метод задавания вопросов. Тексты Витгенштейна очень близки этому методу. Они в значительной степени состоят из вопросов. Поэтому трудно передавать содержание того, что говорит Витгенштейн, не огрубляя и не догматизируя его позицию. Любая попытка излагать его взгляды последовательно и систематично, двигаясь от общего к частному и приводя подтверждающую аргументацию, приводит к тому, что его идеи начинают выглядеть весьма догматично. Слишком значительна дистанция между разного рода заметками, вопросами, примерами и последовательным академическим изложением.

Но почему же наследие Витгенштейна имеет такой вид? В том ли дело, что он не успел придать своим рукописям принятую форму? Думаю, что нет. Дело в том, что они направлены на разрушение каких то философских концепций. Для этого Витгенштейн выдвигает вопросы, показывает опровергающие примеры и т. д. Образуют ли они сами какую-то концепцию? Считает ли Витгенштейн, что он знает нечто важное о сущности языка или математики? Это непростой вопрос, о котором спорят и еще долго будут спорить интерпретаторы. Однако нельзя забывать, что сам Витгенштейн неоднократно подчеркивал, что он не строит никакой теории.

Прежде чем перейти к более подробному освещению рассуждений Витгенштейна, я чувствую необходимость обосновать введение темы философии математики в настоящем, довольно кратком пособии. Зачем она нужна, если философией математики занимается лишь малая часть людей, интересующихся философией?

Она нужна прежде всего для понимания Витгенштейна. Философия Витгенштейна — это, в первую очередь, метод, подход. Последний же можно показать только на конкретном материале, иначе раскрыть его невозможно.

Есть и еще одно основание для обращения к такому специальному предмету, как философия математики. Это значение математики для философии. В самом деле, отличительную особенность математики составляет непреложность ее выводов. Невозможно представить себе, чтобы нарушались ее теоремы, например, чтобы однажды обнаружилось, будто $2x2$ не равно 4 или кубическое уравнение не имеет трех корней. Будучи уникальным примером достоверного, неопровержимого, априорного, и при этом широко применяемого в практике познания, математика издавна была для философии и классическим образцом возможностей человеческого разума, и источником неразрешимых проблем, связанных с объяснением ее природы.

Уже говорилось о кризисе оснований, поразившем математику на рубеже XIX–XX вв. Он был связан с открытием парадоксов теории множеств. Естественно было считать, что парадоксы так или иначе связаны со свободным обращением с актуальной бесконечностью, допускавшимся в теории множеств. Допущение актуальной бесконечности — это рассмотрение бесконечных совокупностей как ставших, завершенных, так сказать «присутствующих целиком и полностью», подобно конечным совокупностям. Сложность и парадоксальность актуальной бесконечности была продемонстрирована еще парадоксами Зенона. Реакцией на кризис явилось формирование различных направлений в основаниях математики. Важнейшими из них были логицизм, формализм, интуиционизм и конструктивизм. Логицизм, о котором уже говорилось в связи с Г. Фреге и Б. Расселом, стремился свести всю математику к логике и тем самым поставить ее на твердое, незыблемое основание логических истин. Формализм выдвинул программу формализации всей математики, чтобы затем, рассматривая математические теории как обозримые системы символов, в которых по строго определенным правилам из одних цепочек символов выводятся другие, доказать, что не может быть выведена такая цепочка символов, которая при содержательной интерпретации была бы противоречием. Подобное доказательство означало бы доказательство непротиворечивости формализованных математических теорий и давало бы гарантию, что здесь не может появиться никаких парадоксов. Интуиционизм, а позднее конструктивизм выступали с программой реформирования существующей математики, предполагающей изгнание неконструктивных элементов, в первую очередь — актуальной бесконечности.

С тех пор и практически до настоящего времени философия математики оказалась сведенной к обсуждению этих основных программ в исследованиях по основаниям. Появилось утверждение, что на современном уровне развития науки философские проблемы математики — это проблемы оснований. Любой человек, заинтересовавшийся философией математики и обратившийся к литературе по этой теме, в первую очередь встретится именно с такими представлениями.

1. Отношение Витгенштейна к дискуссиям об основаниях математики

Витгенштейн еще в 1930-е гг. критически оценивал замысел оснований математики, говоря: «Если в математике как таковой что-то ненадежно, то и любое основание будет столь же ненадежным»[1].

[1] *Wittgenstein L.* Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics. Cambridge, 1939: From the notes of... / Ed. by C. Diamond. Hassocks. 1976. P. 121.

Выражая свое отношение к идее подведения под здание математики какого-то особой прочности фундамента, он писал: «Математические проблемы того, что называют основаниями математики, составляют для нас ее основание не в большей степени, чем нарисованная скала — основание нарисованной башни»[2].

Витгенштейновскую реакцию на драматические коллизии, связанные с обнаружением парадоксов в основаниях, можно передать примерно такими словами: а что, собственно, случилось? Эта установка Витгенштейна уникальна: я не могла бы привести других примеров. В первый момент она может вызвать замешательство перед лицом такой массы свидетельств серьезности и важности факта обнаружения парадоксов в теории множеств. Ну, а в следующий момент позиция Витгенштейна побуждает задуматься над тем, что же, в действительности, случилось? Действительно ли обнаружение парадоксов в теории множеств Г. Кантора есть кризис в основаниях математики как таковой? Ведь несмотря на парадоксы, весь организм математики, занимающий столь значительное место в науке и культуре, не переставал функционировать. Математика продолжала развиваться, а ее результаты по-прежнему имели широчайшее применение в науке и практике, и доверие к ним никоим образом не было подорвано. Почему же появилось представление о кризисе и сложилось то, что можно назвать «кризисным сознанием»? Объяснение, я думаю, состоит в том, что парадоксы поставили под удар не саму математику, а определенные представления о том, какой она должна быть: некую стихийную и повсеместно распространенную философию математики. Она распространена настолько широко, что уже отождествилась с самой математикой. Ее разделяют и математики, и философы, и те, кто выступает против вмешательства философии в дела науки, и те, кто считает такое вмешательство необходимым.

Рассуждения Витгенштейна можно понять как деятельность по прояснению мыслей носителя такой философии. Примерами и наводящими вопросами он хочет лишить данное воззрение его кажущейся очевидности и убедительности. Занимаясь философией математики, как объясняет сам Витгенштейн, он привлекает внимание к фактам, известным всем (кто только знает математику в школьном объеме), но обычно упускаемым из виду. Их не всегда учитывают вследствие присущего всем нам пиетета перед математикой, ибо речь идет о самых простых и известных фактах, которые кажутся слишком мелкими и незначительными, чтобы вспоми-

---

[2] *Wittgenstein L.* Remarks on the foundations of mathematics / Ed. by G. H. von Wright, Rhees R., Anscombe G. E. M. Oxford, 1967. P. 171.

нать о них в связи с такими важными проблемами, как основания математики. Будучи философом, говорит Витгенштейн, он может рассуждать о математике потому, что собирается анализировать только те затруднения, которые вытекают из слов повседневного языка, таких как «доказательство», «число», «последовательность», «порядок» и т. п. Такие затруднения можно продемонстрировать на примерах из элементарной математики. Но именно они наиболее навязчивы, и от них труднее всего избавиться.

Но пора, наконец, сказать, каковы же отличительные признаки той стихийной философии математики, которую я хочу представить как главный объект витгенштейновских атак. Согласно ей, математика есть подлинное познание. Она открывает истины. Ее теоремы — это истинные утверждения. Но если это истины, то к чему они относятся; если это познание, то познание чего? Математических объектов и их отношений. То есть здесь присутствует допущение, что математические объекты (типа чисел, множеств, функций, пространств и пр.) существуют независимо от познающих их людей — математиков, задачей которых является верное описание своих объектов.

Когда человек наблюдает за реальными физическими предметами, они воздействуют на его органы чувств, в результате чего у него формируются представления об этих предметах. Точно так же, признав особую математическую реальность — универсум математических объектов, — приходится признать у математиков наличие особой познавательной способности, благодаря которой они постигают эту реальность. Например, И. Кант признавал особую познавательную способность, служащую для восприятия математических объектов. Он учил об априорном созерцании объектов арифметики и геометрии. Стихийная философия математики, контуры которой я пытаюсь набросать, признает, что ученые-математики с помощью какой-то внечувственной познавательной способности типа интуиции (или, быть может, логики) могут наблюдать свойства математических объектов. Так, известный математик Дж. Харди сравнивал математика с наблюдателем, который рассматривает горный хребет и описывает то, что видит. Если он не может разглядеть чего-то из-за расстояния или тумана, то прибегает к помощи приборов. Для математика роль приборов в подобных случаях играют доказательства. В случае же, когда математический факт можно усмотреть непосредственно, никакого доказательства не требуется. В таком контексте парадоксы начинают восприниматься как свидетельства того, что в некоторых случаях — например, когда речь идет о бесконечных совокупностях — математическая познавательная способность «плохо различает» и может ошибаться.

Отсюда у математиков возникало чувство страха и неуверенности. Скептические сомнения подрывали веру в обоснованность любых результатов, (коль скоро ненадежна та познавательная способность, которой наделил математиков Господь Бог).

Витгенштейн пытается устранить подобные скептические сомнения, проанализировав их мотивы и показав их безосновательность. Скептические сомнения тесно связаны с комплексом представлений, которые мы только что описали как стихийную философию математики. С помощью разнообразных примеров и сократических вопросов Витгенштейн наводит на мысль, что скептицизм относительно оснований математики вытекает из такой философии математики, которая слишком доверяется *ложным аналогиям*, например, аналогиям:

— между математикой и эмпирической наукой;
— между доказательством и экспериментом;
— между конечными и бесконечными совокупностями.

2. Опровержения ложной аналогии между математикой и эмпирической наукой, доказательством и экспериментом

Витгенштейн постоянно проводит мысль об отличии математического вычисления или доказательства от проведения эксперимента. Это отличие наглядно проявляется в реакции на неожиданный результат. Если мы проводим математическое вычисление и его результат расходится с тем, что мы можем наблюдать, то делаем вывод, что некорректно не вычисление, а наблюдение. Например, если мы складываем два яблока и еще два яблока и, пересчитав кучку, обнаруживаем, что у нас три яблока, мы не скажем: «Значит, $2 + 2$ не всегда равно 4». Мы просто скажем: «Одно яблоко пропало, хотя мы не успели этого заметить». Данный пример показывает фундаментальную разницу между математическими и эмпирическими (экспериментальными) предложениями. Она состоит не в формулировке, не в используемых понятиях, но в *употреблении соответствующих предложений*. Математические предложения так же не могут опровергаться экспериментами, как и предложение: «В 1 метре 100 сантиметров».

Математические предложения[3], как станет видно из дальнейшего, используются как правила для формулировки и проверки эмпирических предложений.

[3] В то же время предложение может выглядеть как математическое, но использоваться как экспериментальное. Например, мы затрудняемся в вы-

Раз математические предложения не могут опровергаться фактами реальности, значит, они ничего не говорят о ней. Поэтому, утверждает Витгенштейн, математические предложения не могут быть названы предложениями, ибо не могут быть истинными либо ложными. Это — правила. Их неумолимость связана как раз с такой их характеристикой. Мы можем предсказать результаты вычисления (измерения, взвешивания и пр.), потому что, осуществляя эти процедуры, следуем тем правилам, на которых основаны наши предсказания.

Итак, математические теории не описывают какой-либо реальности, соответствие которой делает математические предложения истинными, и потому они не являются предложениями в собственном смысле слова. Просто математические теоремы указывают на допустимые словосочетания. Когда входящий в них термин начинает использоваться за пределами математики, то они дают возможность определить, какие фразы с этим термином осмысленны, а какие — нет. Геометрия не описывает кубы, существующие в реальности, и не является наукой, изучающей и описывающей идеальные кубы. Тогда что же она делает? Она, отвечает Витгенштейн, определяет смысл слова «куб». Она дает правила использования этого слова, показывает, что можно осмысленно сказать о кубе. В самом деле, если нам скажут: «У этого куба оказалось 13 ребер», то мы, не рассматривая его, можем заявить: «Это невозможно. Либо у него 12 ребер, либо это не куб».

Надо обратить особое внимание на случаи, когда одни и те же слова (например, «куб», «число», «прямая») встречаются и в математических теориях, и в эмпирических науках или в обыденном языке. Витгенштейн неоднократно повторяет, что «связь геометрии с предложениями обыденной жизни, в которых речь идет о черточках, границах цветовых пятен, гранях, углах и проч., состоит вовсе не в том, что геометрия говорит о подобных, но только идеальных гранях, углах и проч. Эта связь состоит в отношении предложения к грамматике... Применяемая геометрия есть грамматика высказываний о пространственных предметах»[4]. Геометрические предложения являются постулатами о видах и способах описания фактов и тем самым — предложениями синтаксиса. Аналогично — «арифметические предложения ничего не говорят о числах,

---

числении n + m и вместо этого, кажем, взвешиваем (n + m) кг и полученный результат объявляем суммой $n + m$.

[4] *Wittgenstein L.* Philosophische Grammatik / Hrsg. von R. Rhees. Frankfurt am. Main, 1973. S. 319.

но определяют, какие предложения о числах имеют смысл, а какие — нет»[5].

Витгенштейновская трактовка математических предложений заставляет по-новому посмотреть на значение и функции доказательства. Если считать, что математические теоремы описывают какую-то особую математическую реальность, то доказательство будет играть роль гаранта или обоснования истинности подобного описания. Оно требуется, если утверждение теоремы не очевидно. А для чего служит доказательство, если доказываемое предложение не может быть ни истинным, ни ложным? Оно служит для установления смысла доказываемого предложения. Одновременно оно позволяет формулировать новые языковые правила. Например, доказательство неосуществимости некоторых построений с помощью циркуля и линейки показывает, что известные вещи не являются аналогичными. Так, проблема трисекции угла не аналогична проблеме бисекции угла, а задача построения правильного семиугольника не аналогична задаче построения правильного пятиугольника, ибо последние можно выполнить с помощью циркуля и линейки, а первые — нельзя. Следовательно, об этих задачах нельзя рассуждать одинаковым способом. О диагонали квадрата нельзя говорить так, как о его стороне, и т. д. Подобные результаты противодействуют нашей склонности к обобщению и проведению аналогий при игнорировании различий.

Математическое предложение не имеет никакого определенного смысла до того, как оно доказано. Пониманию данного обстоятельства, полагает Витгенштейн, мешает ложная аналогия: эксперимент верифицирует истинность физической гипотезы, а доказательство — теоремы. «Ни одно воззрение не сыграло такой роковой для философского понимания роли, как мнение, что доказательство и опыт являются двумя различными, но сравнимыми методами верификации»[6]. Когда мы убеждаемся, что некоторое эмпирическое предложение истинно (или ложно), это не влияет на его смысл, а просто добавляет какую-то внеязыковую информацию. Совсем по-другому обстоит дело с математическими предложениями. Здесь доказательство влияет на словоупотребление. Мы можем осмысленно говорить о кентаврах и единорогах, даже зная, что их не существует. Но когда мы узнаем,

---

[5] *Wittgenstein L.* Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics. Cambridge, 1939: From the notes of… / Ed. by C. Diamond. Hassocks, 1976. P. 51.

[6] *Wittgenstein L.* Philosophische Grammatik / Hrsg. von R. Rhees. Frankfurt am. Main, 1973. S. 361.

что с помощью циркуля и линейки угол нельзя разделить на три равные части, то фраза: «Я разделил этот угол на три равные части с помощью циркуля и линейки» — будет не ложной, а бессмысленной. Естественная реакция на нее: «Вы что-то путаете или не понимаете смысла данной задачи».

Следовательно, доказательства влияют на использование языка. Они создают новые языковые правила. Так, когда была доказана основная теорема алгебры (что уравнение степени n имеет в точности n корней), то фактически было создано новое исчисление. Данная теорема может показаться открытием независящей от нас истины об уравнениях, но это было бы иллюзией, ибо теорема зависит от решения математиков и введения символики для комплексных чисел. Однако чтобы обнаружить это, надо посмотреть на доказательство. Оно вписывает данное математическое предложение в систему других предложений и благодаря этому формирует его смысл, которого не может быть вне системы, тем самым превращая предложение в новое языковое правило. Последнее далее как бы складывается в архив языка, подобно эталону метра, хранящемуся в Париже.

Итак, Витгенштейн убеждает нас в том, что математические предложения — это не идеализированные описания эмпирической реальности и не образы особой умопостигаемой реальности. Они суть грамматические нормы, управляющие нашими описаниями реальности.

С этим поначалу очень трудно согласиться. В самом деле, ведь реальность упорно подтверждает правила арифметики, алгебры, геометрии и прочих разделов математики. Например, часто ли приходится сталкиваться с ситуацией, когда мы сложим два яблока и еще два и обнаружим, что их у нас не четыре, а три или пять? Можно ли даже вообразить себе подобное?

Как же мы можем после этого не верить, что в арифметике и геометрии заключается положительное знание о физической реальности, что в них получают выражения фундаментальные свойства устойчивых объектов? Представление, что предложения школьной арифметики и геометрии суть наиболее бесспорная часть физики твердых материальных тел, как бы само собой навязывается нам. Недаром Кант объявил их врожденными формами человеческого восприятия. Так и кажется, что мы не можем не видеть, как окружающие нас предметы подчиняются этим законам. Представить противоположное оказывается невозможным. Как же можно объявить такие законы чем-то вроде лингвистических конвенций?

Чтобы продемонстрировать конвенциональность принятой арифметики, Витгенштейн пытается показать возможность *других способов* счета или измерения. Он утверждает, например, что можно вообразить себе, что все линейки делаются из эластичного, тянущегося материала. «Но ведь они будут давать ложные результаты!» — так и хочется возразить ему. Однако у Витгенштейна готов ответ: разве есть такая вещь, как «истинная» длина? Длина является результатом выбора определенной единицы и процедуры измерения. Коль скоро они фиксированы, то относительно их становится возможным говорить о правильных или неправильных результатах. Однако говорить так о самих процедурах и единицах измерения бессмысленно. Они могут быть только удобными и неудобными.

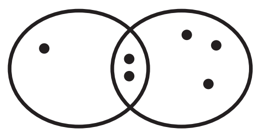
Мы склонны объявить эластичные линейки неудобными. Более того, нам кажется, что их неудобство зависит не от наших конвенций, но от устройства самой реальности: Твердые линейки более соответствуют реальности, и это дает нам право говорить, что наша процедура измерения правильна, а придуманная Витгенштейном в данном примере — неправильна. Что он способен ответить на такие возражения? Это, конечно, важно для оценки его философской позиции. Однако за него трудно ответить однозначно. Представляется, что здесь Витгенштейн занимает довольно осторожную позицию. Он и сам иногда апеллирует к подобному доводу; то, что мы придерживаемся именно таких теорий, методов, приемов, играем именно в такие, а не другие «языковые игры», связано с устройством самой реальности. Но ничего более конкретного по этому поводу он не говорит, что не случайно. Для него, в любом конкретном случае остается неопределенным, в устройстве ли реальности дело или в наших привычках, определяемых социально принятыми правилами, согласно которым мы действуем.

В конечном счете, реальность остается для Витгенштейна слишком «эластичной», сложной и неуловимой, чтобы можно было говорить, что ей соответствует, а что — нет. Например, он допускает, что эластичные линейки только кажутся нам несоответствующими реальности и неприменимыми. Может быть, законам природы вовсе не противоречит допущение, что существует социум, использующий эластичные и текущие измерительные эталоны. И люди приспособились к этому так же, как и мы приспособились ко многим изменчивым факторам нашей жизни, например к тому, что один и тот же товар имеет разную цену. Конечно, в этом воображаемом обществе будет применяться иная арифметика, разовьются иные наука и культура. Но что можно сказать на основании этого о самой реальности?

Витгенштейн утверждает также, что возможна арифметика, в которой $2 + 2 = 3$ или 5. Но она будет неприменима! — воскликнем мы. Она не будет применима тем же способом, каким применяется привычная арифметика, поправит нас Витгенштейн. Но возможно, что она будет применяться по-другому, например при пересчете предметов, которые могут испаряться, сливаться с соседними или, наоборот, раздваиваться. Наша арифметика рассчитана не на такие объекты, а на твердые, четко различимые и устойчивые предметы вроде палочек или кубиков, на которых нас всех учили считать в детстве. Поэтому, если результаты счета вдруг не согласуются с реальностью, мы не подвергаем сомнению арифметику, но заключаем, что пересчитываемые предметы слишком отличаются от парадигмальных твердых неисчезающих объектов счета. Однако отсюда не следует, что не может быть другого счета и других способов обучения.

Наша процедура счета опирается на определенное расчленение пересчитываемого, на то, как мы выбираем единицу пересчета, определяем различие между одним и двумя. В большинстве случаев мы делаем такой выбор, не задумываясь. Акт выбора не замечается, потому что он уже предопределен нашим обучением и воспитанием, т. е. принятыми в нашей культуре стандартами.

Витгенштейн старается подобрать примеры, когда этот выбор не предопределен и не однозначен, скажем, пересчет разноцветных пятен на поверхности, особенно если у них нет четких граней и цвета переходят один в другой. Или, например, глядя на рисунок, надо ответить, сколько точек нарисовано, *6* или 5?



Ответ зависит от того, как мы будем считать.

Указанием на возможность иного — иных подходов, принципов, арифметик и образов мира — Витгенштейн показывает нам: то, что мы привыкли считать незыблемыми истинами о мире, таковыми не являются. Они зависят от принятого образа действий.

Но разве можно считать совсем по-другому? Дело в том, отвечает Витгенштейн, что мы не назовем другой образ действий счетом, а не в том, что наша процедура счета является единственно правильным отражением некоей реальности: умопостигаемого универсума чисел и их отношений или «количественного аспекта материальной реальности». Счет является важной частью нашей жизненной активности. Он *применяется.* Но это, как постоянно подчеркивает Витгенштейн, не дает оснований говорить о его истинности. Поясняя свою мысль, он даже предлагает такой пример: в некотором племени принято осуществлять известные действия, например, начинать (или не начинать) войну в зависимости от результата шахматной партии. Тут шахматы тоже *применяются*. Но это не изменяет их природы. Шахматные правила суть конвенции.

Но разве одни математические предложения не следуют из других с *логической необходимостью?* Разве нет *истины,* соответствующей логическому выводу? Подобный вопрос Витгенштейн парирует контрвопросом: а с чем мы вступим в противоречие, если сделаем иной вывод? Каким образом, например, мы вступаем в конфликт с истиной, используя эластичные линейки? Конечно, в этом случае будут получаться другие результаты. Но разве есть «истинные» размеры? Конечно, понятия «длины» и «измерения» будут иметь в этом случае другое значение. Однако они всегда использовались так, что обнимали целое семейство случаев.

Для пояснения этой мысли Витгенштейна я приведу такие простые и известные всем примеры. Математики прошлого были убеждены, что результата вычисления $3-5$ *не* может быть. Сейчас мы делаем это вычисление и пишем -2. Подобно этому, математика прошлого считала, что у уравнения $x^2 + 1 = 0$ нет корней, тогда как современная математика утверждает, что у него есть два «мнимых» корня. Выводы, таким образом, изменились. Но где же здесь столкновение с реальностью? Его нет. Есть просто *разные исчисления*, имеющие разные применения.

Поэтому Витгенштейн с полным правом говорит, что переход от одного математического предложения к другому в ходе математического вывода просто опирается на принятые правила, которые, в принципе, могли бы быть другими. Здесь нет никакой особой, «оккультной», как он выражается, связи между самими предложениями в цепочке вывода. Предложения следуют друг из друга не сами по себе, а потому, что у нас принята система, в которой есть правило, позволяющее осуществлять такой вывод.

Ложная аналогия между математикой и эмпирической наукой приводит к убеждению, что математика сообщает нам истины о какой-то реальности. Но тогда становится необъяснимым, почему математические предложения неопровержимы. Почему нельзя представить себе опыт или эксперимент, проверяющий математическую теорему подобно тому, как проверяются научные теории?

Неопровержимость математики составляет главную проблему для философии математики. Она не менее актуальна и для логики. Почему, в самом деле, неопровержим вывод «Если всякий объект обладает свойством A, то и этот данный объект обладает свойством A»? Мы чувствуем, что здесь есть некая необходимая связь. Мы не можем представить себе, чтобы было по-другому.

Витгенштейн объясняет это тем, что мы выучивали значение слова «всякий», переходя от «всякий» к «любому». Данный вывод неопровержим, потому что является частью значения слова «всякий», как мы его выучили.

Витгенштейн рассматривает и такое утверждение: «Белое светлее, чем черное». Оно необходимо. Невозможно даже вообразить себе какой-то опровергающий пример. В то же время оно относится к реальности. Как же можно понять его природу? Как объяснить источник его неопровержимости? Очень просто: мы выучиваем *значения слов* «темнее», «светлее», используя различные образцы. Среди них важное место занимают образцы, на которых мы выучиваем значения слов «белое» и «черное». Понятие «светлое» внутренне связано с понятием «белое», ибо мы выучиваем их употребление *совместно*.

Таким образом Витгенштейн развеивает туман, окутывающий необходимые связи между понятиями и превращающий их в нечто таинственное и непостижимое. За ними не стоит никаких «оккультных» связей. За ними стоят *признаваемые нами языковые правила*.

Данные рассуждения направлены также на подтверждение той мысли, что математические предложения суть грамматические правила. Их, статус подобен статусу предложения «Белое светлее, чем черное». Осознать это мешает вера в то, что математические предложения, подобно утверждениям опытных наук, суть истины, описывающие реальность.

Аналогия между математикой и опытными науками приводит и к вере в то, что математика описывает *определенные объекты*. Выше мы говорили об этой черте «стихийной философии математики». Но в начале XX в. такая вера подверглась суровому испытанию из-за обнаружения парадоксов теории множеств. Ведь противоречивые объекты, с точки зрения математики, не существуют. Однако выяснилось, что теория множеств допускала и множества с противоречивыми свойствами. Значит, она не справлялась с задачей адекватного описания универсума математических объектов, ибо не смогла отличить существующие в нем объекты от таких, которые существовать не могут. Эта ситуация породила различные попытки определения того, что такое математическое существование. Велась активная полемика между формалистами, для которых математическое существование было равносильно непротиворечивости, и интуиционистами, для которых можно было говорить о существовании математического объекта, только если доказательство этого существования предоставляло эффективный способ его построения. Они отвергали все доказательства существования «от противного».

Размышления Витгенштейна приводили его к выводу о неправоте обеих сторон. Неправомерны сами попытки определить, что такое *истинное* математическое существование. При этом идея о том, что математическим понятиям соответствуют особые абстрактные сущности, вытекает, по утверждению Витгенштейна, из неправильного представления о значении.

Так, стремление дать определение числа вытекает из неправильного представления о том, что такое значение слова. Считается, что существительное должно обозначать какой-то определенный предмет или мысленный образ. В математических рассуждениях, в отличие от обыденных, числа ведут себя как существительные. Если в обыденной жизни мы скажем: «У меня пять яблок, у тебя три яблока, у меня больше яблок, чем у тебя», то в арифметике этому будет соответствовать предложение: «5 больше, чем 3». Первое предложение было о *яблоках,* второе — о *числах.* Поэтому начинаются поиски того предмета, который соответствует числу и является его значением, подобно тому как значением слова «яблоко» является реальное яблоко. Поскольку ничего подходящего найти не удается, делается вывод, что значениями слов, обозначающих числа, являются абстрактные предметы. Фреге и Рассел предлагают в качестве таковых классы эквивалентных множеств. Но, как объясняет Витгенштейн, данное определение не объясняет природы натуральных чисел. Ибо основной способ установления эквивалентности конечных множеств — это, их *пересчет.*

Где же искать выход? Как нам понять, что такое число? О чем говорит арифметика? Затруднение, полагает Витгенштейн, объясняется еще и тем, что математика окружена особым ореолом значительности. Поэтому он предлагает начать разговор не о математике, а о шахматах. Попробуем вместо вопроса: «О чем арифметика?» — спросить: «О чем шахматы?»

Что такое шахматная фигура? Очевидно, что не кусочек дерева или слоновой кости, а нечто большее, для чего фигурка выступает только знаком. В то же время мы хорошо понимаем, что она не является знаком какого-то идеального объекта. Шахматная фигура, знаком которой выступает данная фигурка, определяется через ее роль в системе правил шахматной игры. Никакого самостоятельного значения она не имеет. То же самое можно сказать и о любом математическом понятии. Его значение — это его *употребление* в соответствующей математической теории.

Однако шахматы не имеют применений, а арифметика или геометрия имеют. Поэтому люди относятся к первым и вторым по-разному и не замечают, что проблема их значения решается в данном случае аналогично.

В том же духе, как мы видели, Витгенштейн трактует и значение математических предложений. Оно определяется их местом в системе утверждений данной математической теории. А последнее устанавливается только благодаря доказательству.

Витгенштейн уделяет много внимания одной ложной языковой аналогии, которая, как он считает, во многом ответственна за мнение, будто математика описывает до нее и независимо от нее существующие объекты. Аналогия связана со словом «искать». Можно искать свою расческу, а можно искать смысл жизни. Возникает много путаницы, когда один вид поиска понимается по аналогии с другим. Тогда и смысл жизни понимается как уже определенная вещь, которая безусловно присутствует где-то рядом, но запропастилась и в нужную минуту не попадается на глаза. Впрочем, данный пример не принадлежит самому Витгенштейну. Он обычно приводил такую ложную аналогию: между поисками решения математической проблемы и поисками Северного полюса полярной экспедицией. Когда экспедиция отправляется в путь, она знает, что представляет собой Северный полюс, где его искать и как. Смысл утверждений о Северном полюсе не зависит от того, удается экспедиции найти его или нет. Когда математик ищет решения своей проблемы, он еще не знает, каким будет то, что он должен найти. Если бы только он это знал, проблема была бы практически решена. Для Витгенштейна это служит верным признаком того, что объект поиска не существует независимо от поиска. Математик не открывает его, но изобретает, конструирует (даже если его конструирование неконструктивно с точки зрения интуиционистрв и конструктивистов).

Математический объект или факт конструируется доказательством, которое включает их в определенную теоретическую систему и тем самым дает им жизнь. Витгенштейн подчеркивает, что доказательство не уточняет старые понятия, но просто создает новые. Доказательство определяет также правила употребления математического утверждения. До доказательства математический объект или факт просто не существуют, подобно тому как шахматные фигуры не существовали до того, как появились правила шахматной игры. А математические теоремы до доказательства — это правила, о которых еще не известно, из какой они игры, т. е. нечто, не обладающее смыслом. Смысл будет создан доказательством. Новые методы доказательства изменяют его.

Парадоксальным следствием витгенштейновских рассуждений оказывается вывод, что доказательство всегда доказывает не то, что собирались доказать. Результат — это осмысленное математическое утверждение, а доказывалось предположение; оно является всего лишь цепочкой символов, вызывающих у математиков определенные ассоциации. Как это ни странно на первый взгляд, я думаю, что, освоившись с витгенштейновской идеей, ее можно счесть очень тонким наблюдением, соответствующим действительности. Математическое предположение, которое еще надо доказать, есть просто некий замысел, сочетание определенных ассоциаций и т.п.

Для Витгенштейна оказывается очень важной мысль, что доказательства бывают разными. Как он разъясняет, слово «доказательство» подобно в этом отношении таким словам, как «народ», «король», «религия». Все доказательства связаны отношением «семейного сходства», но нет общего свойства, которое принадлежало бы всем доказательствам без исключения. Более того, «каждое новое доказательство расширяет в математике понятие доказательства»[7], «никакая черта доказательства не является несущественной»[8].

Рассмотрим, например, такой тип доказательств, как доказательства существования. Интуиционисты и конструктивисты утверждали, что последние должны состоять в построении того объекта, существование которого доказывается, иначе они не имеют смысла. Но почему, спрашивает Витгенштейн, доказательства существования должны быть построениями? Откуда подобное должествование? Защитники такого мнения убеждены, что знают, в чем состоит сущность математического существования, и поэтому могут судить, какие из доказательств являются доказательствами существования. Но «если бы была такая вещь, как существование… тогда можно было бы говорить, что каждое доказательство существования должно делать то-то и то-то. Вейль говорит так, как будто у него есть ясная идея существования, независимо от доказательства, как будто какая-то “естественная история доказательств” обнаружила, что только доказательства такого-то вида доказывают существование», однако «каждое доказательство существования отличается от другого и каждая “теорема существования” имеет свой смысл, соответствующий тому, может или не может быть построено то, существование чего доказывается»[9]. «В действительности существование — это то, что доказывается теоремами, называемыми теоремами существования»[10]. Отрицание неконструктивных доказательств опирается

[7] *Wittgenstein L.* Wittgenstein's lectures: Cambridge, 1932–35; From the notes of… / Ed. by A. Ambrose. Chicago, 1982. XI. P. 10.

[8] Ibid. P. 115.

[9] Ibid. 117.

[10] Ibid. P. 374.

на своего рода «натурализм» в понимании математических объектов. Как будто это что-то определенное и независимое от наших теорий и определений; как будто его можно непосредственно узреть, а потом отобрать доказательства, которые доказывают именно существование, а не что-то другое.

Итак, Витгенштейн утверждает, что для понимания любого математического утверждения надо обратиться к его доказательству. Результаты доказательств или вычислений формулируются в языке как самостоятельные предложения, и это опасная языковая ловушка, способная порождать мифы относительно смысла таких предложений. Поэтому нельзя абсолютизировать формулировку теоремы и рассматривать ее как описание некоторого независимого факта. «Если ты захочешь знать, что означает выражение "непрерывность функции", посмотри на доказательство ее непрерывности; оно покажет тебе, что было доказано»[11]. Но не надо всматриваться для этого в результат, особенно если он переформулирован на языке, отражающем принципы какого-то из направлений в основаниях математики, например, в расселовской символике. Тогда мистификация и путаница становятся просто неизбежными. Витгенштейн постоянно подчеркивает, что в математике «средства и результат — это одно и то же. Как только я начинаю различать средства и результат, это уже не математика»[12].

Витгенштейн показывает, что рассмотрение результата в абстракции от породившего его процесса приводит к фантастическим представлениям в случае, когда результат не имеет самостоятельного физического существования, а существует лишь как элемент определенной системы норм и правил. Тогда реальные связи разрываются и заменяются мистифицированными. Например, отделение математического утверждения от его доказательства приводит к идеалистическим концепциям особых видов бытия и особых сверхчувственных способностей созерцания этого бытия (математическая интуиция). При этом математика начинает пониматься как «физика умопостигаемого мира», а логика, если вспомнить выражение Б. Рассела, — как зоология, описывающая, какие виды сущностей населяют этот умопостигаемый мир идей. Такого рода представления сочетаются обычно с присущим логике и математике стремлением к обоб-

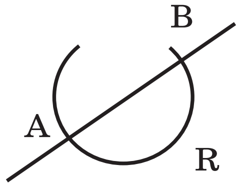
---

[11] *Wittgenstein L.* Philosophische Grammatik / Hrsg. von R. Rhees. Frankfurt am. Main, 1973. S. 369–370.

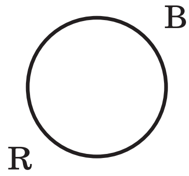
[12] *Wittgenstein L.* Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics. Cambridge, 1939: From the notes of… / Ed. by C. Diamond. Hassocks, 1976. P. 53.

щениям и аналогиям. Вследствие этого установление аналогий или введение обобщений начинает восприниматься как открытие каких-то особых сущностей.

Вот пример обобщения такого рода.



Данный чертеж показывает, что прямая *AB* пересекает окружность R.



Что же показывает данный чертеж? Утверждается, что и в этом случае прямая *AB* пересекает окружность *R*. Сначала это может произвести ошеломляющее впечатление, настолько оно противоречит тому, что мы видим собственными глазами. Но речь идет о том, что *AB* пересекает *R* в *бесконечно удаленной точке*. Введение этого понятия существенно меняет смысл «пересечения». Мы имеем теперь уже не одно, а два различных понятия «пересечения», принадлежащих разным системам. Чтобы обнаружить это, надо смотреть на доказательство. Иначе формулировка типа «любая прямая пересекает любую окружность» может показаться открытием какой-то скрытой и поразительной сущности отношения пересечения, о которой мы даже и не могли подозревать вначале.

3. Витгенштейн о противоречиях в основаниях математики

Парадоксы канторовской теории множеств показали, что в математической теории могут быть противоречия. Тот факт, что *пока* они не обнаружились, не дает никаких гарантий. Скрытое противоречие может выявиться в любой момент, и тогда работа многих математиков окажется напрасной, ибо какой же смысл имеют результаты, полученные в противоречивой системе? Исследования по основаниям математики были направлены на то, чтобы найти гарантии от появления противоречий в будущем. Витгенштейн, как уже говорилось выше, скептически относился к этому замыслу. Он называл страх математиков перед скрытыми противоречиями «суеверным».

Утверждение о существовании «скрытого противоречия», с его точки зрения, бессмысленно, если нет никакого метода обнаружения противоречий.

Страх математиков перед «скрытым противоречием» объясняется мнением, будто, если в теории выявилось противоречие, то вся работа в ней идет насмарку. Чтобы показать, что это не так, Витгенштейн занимается прояснением понятия противоречия. Под ним можно понимать сам закон недопустимости противоречия или некоторое формальное выражение, например $0 \sim 1$. Страх перед «скрытым противоречием» — это страх перед нарушением закона. Однако Витгенштейн убеждает, что это совсем не страшно: когда выявляется противоречие между правилами игры, тогда надо просто ввести новое правило, запрещающее ситуацию, в которой приходят в столкновение правила системы. После этого система сохраняется, и работа в ней вовсе не оказывается напрасной. Часто говорят, что работа в противоречивой системе бессмысленна, ибо из противоречия следует все, что угодно. Но у Витгенштейна есть ответ на это: он предлагает ввести правило, запрещающее вывод из противоречия. Противоречие — это значит: дальше нельзя, дальше заблокировано. И мы принимаем решение, как быть. В частности, мы можем принять, что из противоречия следует все, что угодно, например, *2 х 2 = сколько хотите*. Если вести расчеты по такому принципу, то, конечно, могут рушиться мосты, построенные по подобным расчетам. Однако в этом будем виноваты мы и принятая нами стратегия обращения с обнаруживающимися противоречиями, а вовсе не некие «скрытые противоречия» системы. Противоречие, по Витгенштейну, не ведет к выводу ложных утверждений из истинных, потому что оно просто вообще никуда не ведет (в принятой у нас логике). Оно сопоставимо со знаком «стоп». Поэтому его нельзя не заметить, оно не может быть скрытым.

Поэтому можно смело пользоваться математическими системами и видоизменять их, когда обнаружатся противоречия. Это не обесценит шагов, которые были сделаны ранее. Аксиомы математических теорий суть наши правила игры, а вовсе не описания какой-то реальности. Потому-то бессмысленны скептические сомнения в них.

В современной логике активно разрабатываются исчисления, не содержащие принципа, согласно которому из противоречия следует все, что угодно. К критике этого принципа и отказу от него подошли релевантная и паранепротиворечивая логики. Таким образом, логика наших дней подтверждает идеи Витгенштейна. «Когда противоречия появляются, — говорит Витгенштейн, — тогда и наступает время их элиминировать»[13]. Противоречие можно локализовать, чтобы оно не разрушило всю теорию, хотя в каждом конкретном случае остается сложная проблема, как это сделать.

Что касается поисков такого доказательства непротиворечивости, которое раз и навсегда абсолютно надежно гарантировало бы, что в теории не обнаружатся противоречия, то позиция Витгенштейна состоит в том, что гарантии нет и не может быть, ибо противоречивость не есть свойство, присущее теории самой по себе. Она определяется нашим *употреблением* (теории, системы правил) и тем, какие операции мы осуществляем в ней, а какие — нет. Витгенштейн поясняет свою мысль на примере, который является скорее притчей с определенной моралью. Представим себе, говорит он, тюрьму, построенную с целью не допускать контактов между заключенными. В ней есть сложные коридоры для прогулок, но они должны быть устроены так, чтобы заключенные не могли встретиться. Предположим далее, что эта тюрьма функционирует успешно, и ее заключенные действительно никогда не видели друг друга, хотя могли бы встретиться, если бы во время прогулок по лабиринту коридоров все время поворачивали направо. Но ни один заключенный этого не делает: существует обычай не поступать таким образом. Смысл этого примера сводится к тому, что *употребление* системы важнее, чем ее строение. На это можно было бы возразить, что существенная разница — между наличием стены и наличием привычки (или обычая) не сворачивать направо. Стена дает какую-то гарантию, а обычай — нет. Как тут можно получить гарантию против всех нежелательных употреблений? Никак, отвечает Витгенштейн. Причем гарантий не дают ни обычай, ни стена. Если будут перестроены коридоры, нет гарантий, что заключенные не воспользуются для сообщения дымоходами, вентиляцией и пр. Трудно представить себе предел их изобретательности. Имеет ли смысл задача: найти и предотвратить *все возможные,* но пока *никем не придуманные* способы? Нет, утверждает Витгенштейн, задача поиска потенциальных способов общения заключенных, поиска всех «скрытых» противоречий и т. п. не имеет смысла, поскольку нельзя предвидеть все возможные употребления. Ведь они не существуют потенциально в мире идей, а создаются людьми. И *пока они не созданы, их нет.*

Разбирая далее вопрос о том, почему мы так боимся противоречий, Витгенштейн различает проблему противоречий в описа-

---

[13] *Wittgenstein L.* Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics. Cambridge, 1939: From the notes of… / Ed. by C. Diamond. Hassocks. 1976. P. 210.

ниях, приказах и проч., и проблему противоречивой логики. Мы стараемся избегать противоречий, потому что не знаем, как вести себя в случае противоречивых описаний, как реагировать на противоречивые приказы или просьбы. Сталкиваясь с подобными явлениями, мы, естественно, испытываем затруднения, ибо для нас противоречие бессмысленно. Более того, представляется, что противоречие *должно быть бессмысленным,* что это есть некий объективный закон и что логика и математика не могут ничего другого, кроме как этот закон отразить.

Витгенштейн же стремится дать другое объяснение. Противоречие бессмысленно для нас потому, что правила нашего языкового поведения не предусматривают никакой определенной реакции на противоречивое сообщение или приказания. Но разве это случайно? Мы склонны считать это не случайным, но видеть здесь отражение определенных черт реальности — материальной реальности или универсума логических и математических сущностей. Однако Витгенштейн стремится показать, что подобная черта нашего языка конвенциональна: «Логика без противоречий — это просто особенность нашего использования выражений. Кто-то сказал бы, что если в.исчислении есть противоречие, то оно неприменимо. Но это зависит от того, какое применение вы имеете в виду»[14].

Сразу поясним, чтобы не возникло неправильного представления, будто Витгенштейн — не владеющий логикой, абсурдный и противоречивый мыслитель, который сам не мог рассуждать строго и всех призывал к путанице и противоречиям. Представлять дело таким образом — значит ничего не понять в проблеме, которую обсуждает Витгенштейн. Он прекрасно владел логикой и не призывал к противоречиям в рассуждениях, ибо правилами нашего языка не предусмотрено определенной реакции на них. Он признавал, что когда противоречие выявляется, его надо устранить. Но он выступал против того, чтобы переносить эту черту нашего языкового поведения непосредственно на саму реальность. В данном случае, как и во всех других, он учитывает гибкость и сложность реальности, а также непрямой и неоднозначный характер связи между ней и языком.

Витгенштейн пытается очертить сферу того, что относится к нашим способам говорить о реальности. Он последовательно и жестко проводит дихотомию «логического», или «грамматического», т. е. того, что относится к правилам языка, и эмпирического, несущего внеязыковую информацию. В его системе

[14] Ibid. P. 214.

наложено табу на смешение этих двух категорий. Табу должно предотвратить смешение языковых форм и самой реальности.

В 1939 г. витгенштейновские лекции по философии математики посещал Алан Тьюринг, который и вступил с ним в спор по поводу противоречий. Тьюринг заявил, что опасность противоречий выявится, когда противоречивая система начнет применяться. Из-за этого, например, могут обрушиться мосты, сделанные по ее расчетам. Витгенштейн ответил, что, если мосты обрушатся, значит, при расчетах были использованы ошибочные физические законы и ошибочные физические константы, а противоречия тут ни при чем. Это звучит бездоказательно, но заметим, что Витгенштейн здесь фактически прав. Парадоксы в основаниях математики никак не отразились на устойчивости мостов. Более того, как показали классические исследования А. Тарского, естественный язык плюс обычная двузначная логика уже образуют противоречивую систему[15]. Тем не менее, из-за этого мосты не обрушиваются. Дело в том, что в инженерных расчетах никто не пользуется формулируемым в естественном языке парадоксом Лжеца, чтобы по законам двузначной логики вывести отсюда все, что угодно. Поэтому данное противоречие оказывается безвредным и к катастрофам не приводит. Оно обезврежено принятым употреблением языка. Витгенштейн доказывает, что могли бы существовать и применяться различные логики, арифметики и проч. Логические и математические системы не являются ни отражениями материальной реальности, ни описаниями умопостигаемого мира идей. Они суть наши конструкции. Последнее слово является ключевым для понимания витгенштейновской «психотерапии» страха перед скрытыми противоречиями. Люди, как правило, понимают, что их конструкции несовершенны и всегда нуждаются в доработке, усовершенствовании. Возможности сбоев заложены в любой человеческой конструкции, будь то космический корабль или теория множеств. Но осознание этого, как правило, не парализует человеческую волю и способность действовать. <...>

[15] Ибо в естественном языке можно сформулировать «парадокс Лжеца», а обычная двузначная логика содержит правило, что из противоречия следует все что угодно.